

## Identités remarquables

Elles sont valables sur IR

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  ;  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  ;  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

## Signe du binôme

- si  $a > 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax+b	-	0	+

- Si  $a < 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax+b	+	0	-

Résumé :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax+b	signe -a	0	signe a

## Equations du second degré

Soit a, b et c des nombres réels,  $a \neq 0$ , et  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet :

- Si  $\Delta \geq 0$ , une ou deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dans ce cas :  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Tableau du signe du trinôme : ( Si  $x_1 \leq x_2$  )

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	Signe a	0	signe -a	0	signe a

- Si  $\Delta < 0$ , aucune solution réelle.

Tableau du signe du trinôme :

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe a	

## Suites arithmétiques

Premier terme  $u_0$  ; raison r ;  $u_{n+1} = u_n + r$  ;  $u_n = u_0 + nr$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n \times \frac{1+n}{2}$$

## Suites géométriques

Premier terme  $u_0$  ; raison q ;  $u_{n+1} = qu_n$  ;  $u_n = u_0 q^n$

$$\text{Si } q \neq 1, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(I)

Si  $q=1$ ,  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times (n+1)$

- Suites convergentes : Toute suite croissante (resp.décroissante) et majorée (resp.minorée) est convergente.
- Théorème des gendarmes

Soit  $v_n \leq u_n \leq w_n$  à partir d'un certain rang.

Si  $v_n \rightarrow l$  et  $w_n \rightarrow l$ , alors  $u_n \rightarrow l$  ( $l \in \mathbb{R}$ )

$-\frac{b}{a}$	$+\infty$	$+\infty$ , alors $u_n \rightarrow +\infty$
$0$	$+$	$-\infty$ , alors $u_n \rightarrow -\infty$

### Combinatoire

- Factorielle :  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ ;  $0! = 1$ ;  $1! = 1$
- Nombre d'arrangements sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  éléments :  $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$
- Nombre d'arrangement avec répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  éléments :  $n^p$

- Nombre de combinaisons de  $p$  éléments parmi  $n$  éléments :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Cardinal d'un ensemble

A et B sont des parties d'un ensemble  $\Omega$

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B);$$

$$\text{card}(\emptyset) = 0; \text{card}(\bar{A}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(A)$$

### Probabilités

- Expérience aléatoire et probabilités

\* Une situation est dite d'équiprobabilité si toutes les issues ont la même probabilité de se réaliser.

- Événements et calculs de probabilités

Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience aléatoire.

\* La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le constituent.

\* La probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1.

\* En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à A}}{\text{nombre total d'issues}} \quad p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

\* Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire

Événement	Notation	Probabilité
événement certain	$\Omega$	$p(\Omega) = 1$
Événement impossible	$\emptyset$	$p(\emptyset) = 0$
événement contraire de A	$\bar{A}$	$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
Intersection de A et B	$A \cap B$	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
Réunion de A et B	$A \cup B$	
A et B incompatibles	$A \cap B = \emptyset$	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$



## (II)

➤ Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé

$$* p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \text{ (avec } p(B) \neq 0)$$

\* Formule des probabilités composée :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$$

\* A et B sont indépendants si et seulement si

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

\* Si forment  $A_1, A_2, \dots, A_n$  une partition de A :

$$p(A) = p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) + \dots + p(A \cap A_n) \\ = p_{A_1}(A) \times p(A_1) + p_{A_2}(A) \times p(A_2) + \dots + p_{A_n}(A) \times p(A_n)$$

### Variables aléatoires discrètes

➤ Loi de probabilité

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$p(X=x_i)$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

\* Espérance mathématique :  $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$

\* Variance :  $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$   
 $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

\* Écart type :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

➤ Loi binomiale  $\mathcal{B}(n; p)$

Pour n épreuves indépendantes avec une probabilité de

succès p :  $p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$  pour  $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$

$E(X) = np$  et  $V(X) = np(1-p)$

### Généralités sur les fonctions

• Continuité

➤  $f$  est continue en  $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$f$  continue à droite en  $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

$f$  continue à gauche en  $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

➤ Image d'un intervalle par une fonction continue

$f \nearrow$ sur l'intervalle I (a<b)	$f \searrow$ sur l'intervalle I (a<b)
$f([a; b]) = [f(a); f(b)]$	$f([a; b]) = [f(b); f(a)]$
$f([a; b[) = [f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$	$f([a; b[) = [\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$f([a; b]) = [\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$f([a; b]) = [f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$f([a; b[) = [\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$	$f([a; b[) = [\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$f([a; +\infty[) = [f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$f([-\infty; a]) = [f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$
$f([a; +\infty[) = [\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$f([-\infty; a]) = [\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)]$
$f([-\infty; +\infty[) = [\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$f([-\infty; +\infty[) = [\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$

### Théorème des valeurs intermédiaires

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[a; b]$  et soit  $k$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$

Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$ , alors il existe un réel  $c$  appartenant à  $[a; b]$  tel que :  $f(c) = k$ .

Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$  et si  $f$  est strictement monotone sur  $[a; b]$ , alors il existe un unique réel  $c$  appartenant à  $[a; b]$  tel que :  $f(c) = k$

### (III)

En particulier, si  $f$  est une fonction continue sur un segment  $[a; b]$  et si  $f(a) \times f(b) < 0$ , alors l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $]a; b[$ .  
Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un segment  $[a; b]$  et si  $f(a) \times f(b) < 0$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $]a; b[$ .

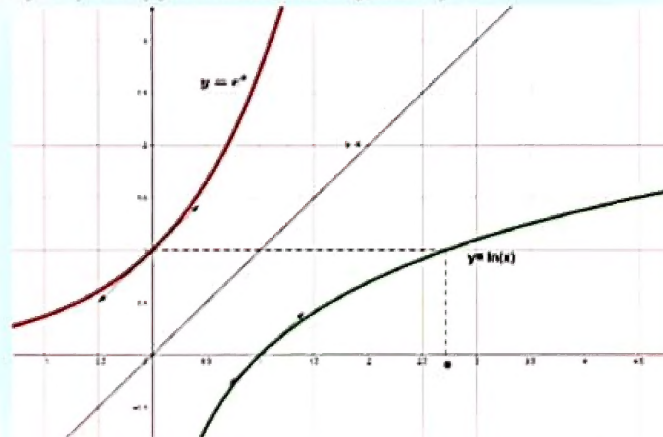
#### Fonctions continues et strictement monotone sur un intervalle

Si une fonction  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , alors  $f$  admet une fonction réciproque notée  $f^{-1}$ ;  $f^{-1}$  est définie de  $f(I)$  vers  $I$  telle que :

$$(\forall x \in I) (\forall y \in f(I)) \quad f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , alors :

- Sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$  et de même monotonie que  $f$
- Les représentations graphiques de  $f$  et  $f^{-1}$  dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$



#### Limite d'une Suite récurrente convergente

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , et  $(u_n)$  une suite à valeurs dans  $I$ .

Si  $u_{n+1} = f(u_n)$ , si  $\lim u_n = l$  et si  $f$  est continue en  $l$ , alors  $f(l) = l$  ( $l$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ )

#### Fonctions usuelles

- Propriétés algébriques

##### ➤ Fonction logarithme népérien :

La fonction logarithme népérien  $\ln$  est la primitive de la fonction :  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $]0; +\infty[$  qui vérifie  $\ln(1) = 0$ .

$$\ln(e) = 1 ; e \approx 2,718$$

$$\text{Sur } ]0; +\infty[ : \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) ; \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) ;$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) ; \ln(a^n) = n\ln(a) ; \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln(a)$$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

##### ➤ Fonction logarithme décimal log :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} ; \log(1) = 0 ; \log(10) = 1$$

$$\text{Sur } ]0; +\infty[ : \log(ab) = \log(a) + \log(b) ; \log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) ; \log(a^n) = n\log(a) ; \log\sqrt{a} = \frac{1}{2}\log(a)$$

##### ➤ Fonction exponentielle :

$$\exp = \ln^{-1} ; \exp: \mathbb{R} \rightarrow ]0; +\infty[$$

$$x \mapsto e^x = \ln^{-1}(x)$$



## (IV)

Si  $x \in ]0; +\infty[$  et  $y \in ]0; +\infty[$  :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$e^0 = 1 ; e^1 = e ; e^{a+b} = e^a \times e^b ; e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} ; (e^a)^b = e^{ab}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$e^x$				

$$(e^x)' = e^x$$

- Fonction exponentielle de base 10

On a :  $10^x = e^{x \ln(10)}$

$$10^x = a \Leftrightarrow \ln(10^x) = \ln(a) \Leftrightarrow x \ln(10) = \ln(a) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$$

$$10^x = a \Leftrightarrow \log(10^x) = \log(a) \Leftrightarrow x = \log(a)$$

$$10^x > a \Leftrightarrow \ln(10^x) > \ln(a) \Leftrightarrow x \ln(10) > \ln(a) \Leftrightarrow x > \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$$

$$10^x > a \Leftrightarrow \log(10^x) > \log(a) \Leftrightarrow x > \log(a)$$

- Limites usuelles des fonctions ln et exp et des suites

> Fonctions

comparaison à l'infini	comparaison à l'origine
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ;$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	
Croissances comparées à l'infini, $n \in \mathbb{N}^*$	Croissances comparées à l'origine, $n \in \mathbb{N}^*$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 ;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 ;$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 ;$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

> Suites

\* si  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^q = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^q} = 0$

\* si  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$  \* si  $-1 < q < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

\* si  $q \leq -1$ ,  $q^n$  n'a pas de limite quand  $n \rightarrow +\infty$

## Dérivées et primitives

- Dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
$a$ ( $a \in \mathbb{R}$ )	0	$] -\infty; +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$n x^{n-1}$	$] -\infty; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$

$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$
$e^x$	$e^x$	$]-\infty; +\infty[$

(V)

- Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$	$(u^2)' = 2u'u$
$(ku)' = ku' \ (k \in \mathbb{R})$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(e^u)' = u'e^u$

- Primitives

La fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

$u$  est une fonction dérivable.  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels.  $n \in \mathbb{Z}$

$f(x)$	Primitives $F$	Remarques
$a$	$ax + c$	
$x$	$\frac{x^2}{2} + c$	
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + c$	$x > 0$ ou $x < 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$x > 0$
$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$	$a \neq 0$ et $n \neq -1$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c$	$n \neq -1$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u(x)  + c$	$u(x) > 0$ ou $u(x) < 0$
$e^x$	$e^x$	
$e^{ax+b}$	$\frac{1}{a} e^{ax+b}$	$a \neq 0$
$u'e^u$	$e^u$	

- Calcul intégral

- Formules fondamentales

Si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Si  $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ , alors  $g'(x) = f(x)$  ;  $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$

Formule de Chasles :  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

Linéarité :  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

Positivité : si  $a \leq b$  et  $f \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Intégration d'une inégalité,  $a \leq b$  : si  $f \leq g$ , alors  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Si  $m \leq f \leq M$ , alors  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de  $f$  sur  $[a; b]$  :  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

---

➤ **Méthode d'intégration par partie pour calculer une intégrale :**

Si  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[a; b]$  et  $u'$  et  $v'$  continues sur  $[a; b]$ , alors :

$$\int_b^a u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_b^a u(x)v'(x)dx$$

**(VI)**